

UNIUBE — UNIVERSIDADE DE UBERABA
Campus Uberlândia

CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

TRABALHO DE CÁLCULO DIFERENCIAL
VT1 — PARTE 02

Funções do 1º grau, 2º grau e exponencial

ALUNO 1: Pedro Paulo Coelho Valadão — RA: _____ (turma 11)

ALUNO 2: _____ — RA: _____

PROFESSORA: Elaine Freitas Muniz

UBERLÂNDIA – MG
SETEMBRO 2026

CONJUNTOS E FUNÇÃO DO 1º GRAU

Questão 01

Dados $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, 0, 2, 4, 5, 7\}$, determine: a) $A \cup B$ b) $A \cap B$.

Resolução:

União ($A \cup B$): todos os elementos que estão em A ou em B, sem repetir. Interseção ($A \cap B$): só os elementos que estão em A e em B ao mesmo tempo.

Elemento	Está em A?	Está em B?	$A \cup B$	$A \cap B$
-1	sim	sim	sim	sim
0	sim	sim	sim	sim
1	sim	não	sim	não
2	sim	sim	sim	sim
3	sim	não	sim	não
4	sim	sim	sim	sim
5	sim	sim	sim	sim
7	não	sim	sim	não

Prova real (número de elementos):

$$\begin{aligned}n(A) &= 7 & n(B) &= 6 & n(A \cap B) &= 5 \\n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 7 + 6 - 5 = 8\end{aligned}$$

O conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ tem 8 elementos. Confere.

Resposta: a) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

b) $A \cap B = \{-1, 0, 2, 4, 5\}$

Questão 02

Obtenha a lei da função do 1º grau que passa por $(-1, 2)$ e $(2, -1)$ e determine os coeficientes angular e linear.

Resolução:

A lei é $y = ax + b$. Chamo $(x_1, y_1) = (-1, 2)$ e $(x_2, y_2) = (2, -1)$.

Coeficiente angular:

$$a = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

$$a = (-1 - 2) / (2 - (-1))$$

$$a = (-3) / (2 + 1)$$

$$a = -3 / 3 = -1$$

Coeficiente linear (substituo o ponto $(-1, 2)$ em $y = -x + b$):

$$2 = (-1) \cdot (-1) + b$$

$$2 = 1 + b$$

$$b = 2 - 1 = 1$$

Lei da função: $y = -x + 1$.

Prova real com o outro ponto $(2, -1)$:

$$y = -(2) + 1 = -1 \quad \checkmark$$

Como $a = -1 < 0$, a função é decrescente. Raiz: $-x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$, ponto $(1, 0)$. Corta o eixo y em $(0, 1)$.

Resposta: $y = -x + 1$; coeficiente angular $a = -1$ e coeficiente linear $b = 1$.

Questão 03

Classifique em crescente ou decrescente: a) $y = 10x - 4$ b) $y = -6x$ c) $y = -x + 2$ d) $y = (3/2)x$.

Resolução:

Numa função do 1º grau $y = ax + b$, quem decide é o sinal do coeficiente angular a : se $a > 0$ a função é crescente; se $a < 0$ é decrescente. O b não influencia.

a) $y = 10x - 4$	$a = 10$	$\rightarrow 10 > 0$	$\rightarrow$ crescente
b) $y = -6x$	$a = -6$	$\rightarrow -6 < 0$	$\rightarrow$ decrescente
c) $y = -x + 2$	$a = -1$	$\rightarrow -1 < 0$	$\rightarrow$ decrescente
d) $y = (3/2)x$	$a = 3/2$	$\rightarrow 3/2 > 0$	$\rightarrow$ crescente

Em b) e d) não há termo b , ou seja, $b = 0$ e a reta passa pela origem. Em c) o coeficiente de x é -1 (pois $-x = (-1) \cdot x$). Em d) a fração $3/2$ é positiva porque numerador e denominador são positivos.

Resposta: a) crescente ($a = 10 > 0$); b) decrescente ($a = -6 < 0$); c) decrescente ($a = -1 < 0$); d) crescente ($a = 3/2 > 0$).

Questão 04

Observe os gráficos e determine a função $y = ax + b$ correspondente a cada um (f corta o eixo y em 4 e o eixo x em 7 ; g corta o eixo y em 3 e o eixo x em -1).

Resolução:

Em $y = ax + b$, o b é o ponto onde a reta corta o eixo y . A raiz r (onde corta o eixo x) vale $r = -b/a$, logo $a = -b/r$.

Gráfico $f(x)$

Leitura: a reta corta o eixo y em 4 e o eixo x em 7, e é decrescente.

$$\begin{aligned} b &= 4 & r &= 7 \\ a &= -b/r = -4/7 \\ f(x) &= -(4/7)x + 4 \end{aligned}$$

Prova real:

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 & \checkmark \text{ corta } y \text{ em } 4 \\ f(7) &= -(4/7) \cdot 7 + 4 = -4 + 4 = 0 & \checkmark \text{ corta } x \text{ em } 7 \end{aligned}$$

$a = -4/7 < 0 \rightarrow$ decrescente, como no desenho.

Gráfico $g(x)$

Leitura: a reta corta o eixo y em 3 e o eixo x em -1 , e é crescente.

$$\begin{aligned} b &= 3 & r &= -1 \\ a &= -b/r = -3/(-1) = 3 \\ g(x) &= 3x + 3 \end{aligned}$$

Prova real:

$$\begin{aligned} g(0) &= 3 & \checkmark \text{ corta } y \text{ em } 3 \\ g(-1) &= 3 \cdot (-1) + 3 = -3 + 3 = 0 & \checkmark \text{ corta } x \text{ em } -1 \end{aligned}$$

$a = 3 > 0 \rightarrow$ crescente, como no desenho.

Resposta: $f(x) = -(4/7)x + 4$ e $g(x) = 3x + 3$.

Questão 05

Dada a função do 1º grau $f(x) = -4 - 3x$, determinar os itens a) a i).

Resolução:

Primeiro reescrevo a função na forma $f(x) = ax + b$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -4 - 3x \rightarrow f(x) = -3x - 4 \\ a &= -3 \text{ (coeficiente angular)} & b &= -4 \text{ (coeficiente linear)} \end{aligned}$$

a) A função é crescente ou decrescente? Justifique.

O coeficiente angular é $a = -3$, que é negativo. Como $a < 0$, a função é decrescente: quando x aumenta, $f(x)$ diminui. Verificando: $f(0) = -4$ e $f(1) = -7$; x subiu e $f(x)$ desceu.

Resposta: decrescente, porque $a = -3 < 0$.

b) A raiz de $f(x)$ e os coeficientes angular e linear

$$\begin{aligned} -3x - 4 &= 0 \\ -3x &= 4 \\ x &= 4/(-3) = -4/3 \end{aligned}$$

Prova real: $f(-4/3) = -3 \cdot (-4/3) - 4 = 4 - 4 = 0 \checkmark$

Resposta: raiz $x = -4/3$; coeficiente angular $a = -3$; coeficiente linear $b = -4$.

c) O ponto em que $f(x)$ intercepta o eixo y

No eixo y temos $x = 0$:

$$f(0) = -3 \cdot 0 - 4 = -4$$

Resposta: a função corta o eixo y no ponto $(0, -4)$.

d) Os valores de x para os quais $f(x)$ é negativa

$$\begin{aligned} -3x - 4 &< 0 \\ -3x &< 4 \\ x &> -4/3 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(dividi por } -3, \text{ número negativo:} \\ \text{o sinal da desigualdade inverte)} \end{array}$$

Verificação: $x = 0$ está à direita de $-4/3$ e $f(0) = -4 < 0 \checkmark$

Resposta: $f(x) < 0$ para $x > -4/3$, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4/3\}$.

e) O domínio que tem -16 como imagem

Sei o valor de $f(x) = -16$ e quero o x :

$$\begin{aligned} -3x - 4 &= -16 \\ -3x &= -16 + 4 \\ -3x &= -12 \\ x &= -12/(-3) = 4 \end{aligned}$$

Prova real: $f(4) = -3 \cdot 4 - 4 = -12 - 4 = -16 \checkmark$

Resposta: $x = 4$.

f) Os valores de x para os quais $f(x)$ é positiva

$$\begin{aligned} -3x - 4 &> 0 \\ -3x &> 4 \\ x &< -4/3 \end{aligned} \quad \text{(dividi por } -3: \text{ inverte o sinal)}$$

Verificação: $x = -2$ está à esquerda de $-4/3$ e $f(-2) = 6 - 4 = 2 > 0 \checkmark$

Resposta: $f(x) > 0$ para $x < -4/3$, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4/3\}$.

g) A imagem que tem domínio -2

Sei o $x = -2$ e quero $f(x)$:

$$f(-2) = -3 \cdot (-2) - 4 = 6 - 4 = 2$$

Resposta: a imagem de -2 é 2 , ou seja, o gráfico passa por $(-2, 2)$.

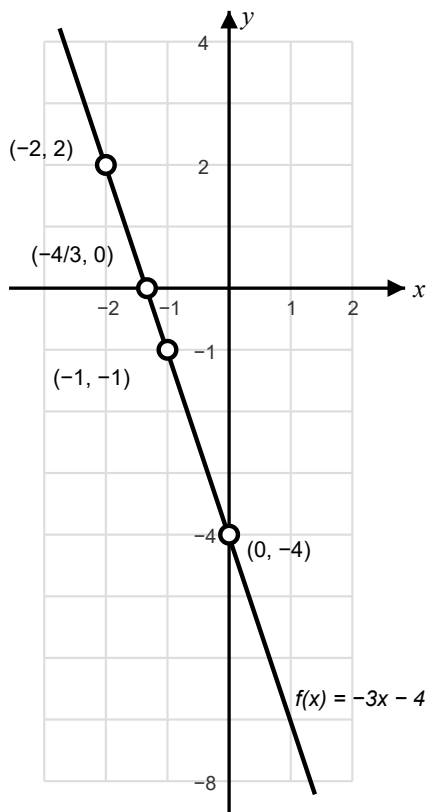
h) Esboço do gráfico de $f(x)$

Uma reta fica definida por dois pontos. Uso os pontos já encontrados:

Ponto	De onde veio	Coordenadas
corte no eixo y	item c)	$(0, -4)$
corte no eixo x (raiz)	item b)	$(-4/3, 0) \approx (-1,33; 0)$
ponto extra	item g)	$(-2, 2)$
ponto extra	item i)	$(-1, -1)$

O que desenhar (com régua):

1. Eixos x (horizontal) e y (vertical) com setas e a origem O.
2. Escala de 1 em 1 nos dois eixos (x de -3 a 2 ; y de -8 a 4).
3. Marcar os pontos $(0, -4)$, $(-4/3, 0)$, $(-2, 2)$ e $(-1, -1)$ com as coordenadas escritas ao lado.
4. Traçar a reta pelos pontos, prolongando com setas nas duas pontas. A reta desce da esquerda para a direita ($a = -3 < 0$).
5. Escrever $f(x) = -3x - 4$ ao lado da reta.



Modelo do esboço: reta decrescente por $(0, -4)$ e $(-4/3, 0)$.

Resposta: reta decrescente que passa por $(0, -4)$ e $(-4/3, 0)$, conforme o esboço.

i) A função passa pelo ponto $(-1, -1)$? Justifique fazendo as contas.

Substituo $x = -1$ na função:

$$f(-1) = -3 \cdot (-1) - 4 = 3 - 4 = -1$$

O valor calculado $f(-1) = -1$ é igual à ordenada do ponto dado ($y = -1$). Logo o ponto pertence à reta.

Resposta: sim, a função passa por $(-1, -1)$, pois $f(-1) = -1$.

Questão 06

Uma barra de ferro com temperatura inicial de $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ foi aquecida até $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ (o gráfico mostra a temperatura em função do tempo). Em quanto tempo, após o início, a temperatura atingiu $0\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Resolução:

Variáveis: t = tempo (minutos) e T = temperatura ($^{\circ}\text{C}$). Pontos lidos no gráfico: $(0, -10)$ (temperatura inicial) e $(5, 30)$ (temperatura final, no instante 5).

Coefficiente angular:

$$a = (30 - (-10)) / (5 - 0) = (30 + 10) / 5 = 40 / 5 = 8$$

Coefficiente linear: em $t = 0$ a temperatura é -10 , então $b = -10$.

$$T(t) = 8t - 10$$

Prova real: $T(5) = 8 \cdot 5 - 10 = 40 - 10 = 30 \checkmark$

Quando a temperatura é $0\text{ }^{\circ}\text{C}$:

$$\begin{aligned} 8t - 10 &= 0 \\ 8t &= 10 \\ t &= 10/8 = 5/4 = 1,25 \text{ min} \end{aligned}$$

Convertendo: $0,25 \text{ min} \times 60 = 15 \text{ s}$. Logo $1,25 \text{ min} = 1 \text{ min e } 15 \text{ s}$.

Prova real: $T(1,25) = 8 \cdot 1,25 - 10 = 10 - 10 = 0 \checkmark$

Resposta: a temperatura atingiu $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ após 1,25 minuto (1 minuto e 15 segundos) do início da experiência.

Questão 07

A promoção de uma mercadoria está representada no gráfico por 6 pontos de uma mesma reta (valor total da compra em função do número de unidades). Quem comprar 20 unidades pagará por unidade, em reais, o equivalente a?

Resolução:

Variáveis: x = número de unidades e V = valor total da compra (R\$). No gráfico, os 6 pontos estão em $x = 5, 10, 15, 20, 25$ e 30 , subindo de $V = 50$ (em $x = 5$) até $V = 150$ (em $x = 30$).

Pontos usados: $(5, 50)$ e $(30, 150)$.

$$a = (150 - 50) / (30 - 5) = 100/25 = 4$$

Substituo $(5, 50)$ em $V = 4x + b$:

$$50 = 4 \cdot 5 + b$$

$$50 = 20 + b$$

$$b = 30$$

$$V(x) = 4x + 30$$

Prova real: $V(30) = 4 \cdot 30 + 30 = 120 + 30 = 150 \checkmark$

Valor total de 20 unidades:

$$V(20) = 4 \cdot 20 + 30 = 80 + 30 = 110$$

A pergunta é o valor por unidade:

$$110 / 20 = 5,50$$

Resposta: quem comprar 20 unidades pagará R\$ 5,50 por unidade (total de R\$ 110,00).

Questão 08

90.000 torcedores. Três portões abertos às 12 h; até as 15 h entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir das 15 h abriram mais 3 portões e o fluxo aumentou. Quando o número de torcedores atingiu 45.000, o relógio marcava 15 horas e _____.

Resolução:

Pontos lidos no gráfico: (12 h, 0), (15 h, 30.000) e (17 h, 90.000). O gráfico tem dois trechos de reta, com a mudança às 15 h.

Como 45.000 está entre 30.000 (às 15 h) e 90.000 (às 17 h), o valor procurado está no segundo trecho. Uso só a reta do segundo trecho.

Fluxo no segundo trecho:

$$\begin{aligned}\text{pessoas: } & 90.000 - 30.000 = 60.000 \\ \text{tempo: } & 17 \text{ h} - 15 \text{ h} = 2 \text{ h} \\ \text{taxa} &= 60.000 / 2 = 30.000 \text{ pessoas por hora} \\ &= 30.000 / 60 = 500 \text{ pessoas por minuto}\end{aligned}$$

Pessoas que faltam para chegar a 45.000 depois das 15 h:

$$\begin{aligned}45.000 - 30.000 &= 15.000 \text{ pessoas} \\ \text{tempo} &= 15.000 / 500 = 30 \text{ minutos}\end{aligned}$$

Pela equação da reta (t = horas depois das 15 h):

$$\begin{aligned}N(t) &= 30.000 + 30.000 \cdot t \\ 30.000 + 30.000t &= 45.000 \\ 30.000t &= 15.000 \\ t &= 0,5 \text{ h} = 30 \text{ min}\end{aligned}$$

Prova real: $30.000 + 500 \cdot 30 = 30.000 + 15.000 = 45.000 \checkmark$

Resposta: o relógio marcava 15 horas e 30 minutos (15h30).

FUNÇÃO DO 2º GRAU

Questão 01

Para a função $f(x) = x^2 - x - 2$, calcule: a) as raízes; b) o vértice; c) o conjunto imagem; d) o menor valor de $f(x)$ (explique); e) o gráfico.

Resolução:

Coeficientes: $f(x) = 1 \cdot x^2 + (-1) \cdot x + (-2)$, então $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$.

a) As raízes

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$$

$$x = (-b \pm \sqrt{\Delta}) / 2a = (-(-1) \pm 3) / (2 \cdot 1) = (1 \pm 3) / 2$$

$$x_1 = (1 + 3) / 2 = 4 / 2 = 2$$

$$x_2 = (1 - 3) / 2 = -2 / 2 = -1$$

Prova real:

$$f(2) = 2^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 \quad \checkmark$$

Conferindo por soma e produto: soma = $-b/a = 1$ e $2 + (-1) = 1 \checkmark$; produto = $c/a = -2$ e $2 \cdot (-1) = -2 \checkmark$

Resposta: as raízes são $x = -1$ e $x = 2$.

b) O vértice

$$x_v = -b/2a = -(-1) / (2 \cdot 1) = 1/2$$

$$y_v = -\Delta/4a = -9 / (4 \cdot 1) = -9/4$$

Conferindo por substituição:

$$f(1/2) = (1/2)^2 - 1/2 - 2 = 1/4 - 2/4 - 8/4 = -9/4 \quad \checkmark$$

Resposta: $V = (1/2, -9/4) = (0,5; -2,25)$.

c) O conjunto imagem

Como $a = 1 > 0$, a concavidade é voltada para cima e o vértice é o ponto mais baixo. A função assume todos os valores de $y_v = -9/4$ para cima.

Resposta: $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -9/4\}$.

d) Qual o menor valor de $f(x)$? Explique.

O coeficiente $a = 1$ é positivo, portanto a parábola tem concavidade para cima. Numa parábola com concavidade para cima o vértice é o ponto de mínimo. Como $y_v = -\Delta/4a = -9/4$, o menor valor da função é $-9/4 = -2,25$, que ocorre em $x = 1/2$. Não existe x real com $f(x) < -9/4$.

Resposta: o menor valor de $f(x)$ é $-9/4 = -2,25$, em $x = 1/2$.

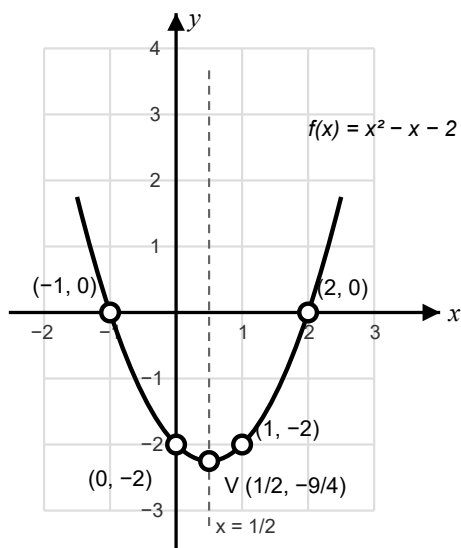
e) Gráfico de $f(x)$

Pontos para desenhar:

Ponto	Coordenadas	De onde veio
raiz 1	$(-1, 0)$	item a)
raiz 2	$(2, 0)$	item a)
vértice	$(1/2, -9/4)$	item b)
corte no eixo y	$(0, -2)$	$f(0) = c = -2$
simétrico de $(0, -2)$	$(1, -2)$	$f(1) = 1 - 1 - 2 = -2$

O que desenhar:

1. Eixos x e y com régua, setas e escala de 1 em 1 (x de -2 a 3; y de -3 a 4).
2. Marcar os 5 pontos da tabela com as coordenadas escritas ao lado.
3. Ligar os pontos com uma curva suave (parábola), concavidade para cima, sem usar segmentos de reta.
4. Traçar tracejada a reta de simetria $x = 1/2$ passando pelo vértice.
5. Escrever $f(x) = x^2 - x - 2$ ao lado da curva e "V" junto ao vértice.



Modelo do gráfico: parábola com concavidade para cima, raízes -1 e 2, vértice $(1/2, -9/4)$.

Resposta: parábola com concavidade para cima, cortando o eixo x em -1 e 2, o eixo y em -2, com vértice (mínimo) em $(1/2, -9/4)$, conforme o gráfico.

Questão 02

O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 30x - 5$, onde x é a quantidade mensal vendida. Qual o lucro mensal máximo possível?

Resolução:

Coefficientes: $a = -1$, $b = 30$, $c = -5$.

Como $a = -1 < 0$, a concavidade é voltada para baixo e a função possui máximo no vértice. A pergunta pede o lucro (valor da função), ou seja, o y_v .

Quantidade que dá o lucro máximo:

$$x_v = -b/2a = -30/(2 \cdot (-1)) = -30/(-2) = 15 \text{ unidades}$$

Lucro máximo (substituindo $x = 15$):

$$\begin{aligned} L(15) &= -(15)^2 + 30 \cdot 15 - 5 \\ &= -225 + 450 - 5 \\ &= 220 \end{aligned}$$

Conferindo pela fórmula do y_v :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 900 - 20 = 880 \\ y_v &= -\Delta/4a = -880/(4 \cdot (-1)) = -880/(-4) = 220 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Teste dos vizinhos: $L(14) = -196 + 420 - 5 = 219$ e $L(16) = -256 + 480 - 5 = 219$, ambos menores que 220 ✓

Resposta: o lucro mensal máximo possível é 220 (R\$ 220,00), obtido com a venda de 15 unidades.

Questão 03

O custo C , em reais, para produzir n unidades é $C = 2510 - 100n + n^2$. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo?

Resolução:

Reescrevendo na forma padrão:

$$\begin{aligned} C(n) &= n^2 - 100n + 2510 \\ a &= 1 \quad b = -100 \quad c = 2510 \end{aligned}$$

Como $a = 1 > 0$, a concavidade é para cima e há mínimo no vértice. A pergunta pede a quantidade (o n), ou seja, o n_v .

$$n_v = -b/2a = -(-100)/(2 \cdot 1) = 100/2 = 50 \text{ unidades}$$

Custo mínimo (substituindo $n = 50$):

$$\begin{aligned} C(50) &= 50^2 - 100 \cdot 50 + 2510 \\ &= 2500 - 5000 + 2510 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Conferindo pelo y_v :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-100)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2510 = 10.000 - 10.040 = -40 \\ y_v &= -\Delta/4a = -(-40)/(4 \cdot 1) = 40/4 = 10 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Como $\Delta = -40 < 0$, a função não tem raízes reais: o custo nunca chega a zero, é sempre positivo. Teste dos vizinhos: $C(49) = 11$ e $C(51) = 11$, ambos maiores que 10 ✓

Resposta: devem ser produzidas 50 unidades; o custo mínimo é R\$ 10,00.

Questão 04

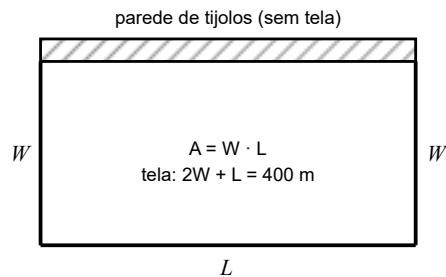
Uma parede de tijolos será um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados serão usados 400 m de tela de arame, de modo a produzir a área máxima. Determine as dimensões do curral.

Resolução:

Figura: chamo de W cada um dos dois lados perpendiculares à parede e de L o lado paralelo à parede. A parede substitui um dos quatro lados, então a tela é usada em três lados.

O que desenhar:

1. Um retângulo. O lado de cima é a parede: traço grosso, hachurado, escrito "parede de tijolos (sem tela)".
2. Os outros três lados em traço simples, escrito "tela". Os dois lados verticais recebem a letra W ; o lado de baixo recebe a letra L .
3. Ao lado da figura: $2W + L = 400$ (tela) e $A = W \cdot L$ (área).



Modelo da figura: parede em cima (hachurada), tela nos outros três lados.

Restrição (tela nos três lados):

$$2W + L = 400 \quad \rightarrow \quad L = 400 - 2W$$

Área em função de W:

$$A = W \cdot L = W \cdot (400 - 2W) = 400W - 2W^2$$

$$A(W) = -2W^2 + 400W \quad a = -2, \quad b = 400, \quad c = 0$$

Como $a = -2 < 0$, a concavidade é para baixo e há máximo no vértice.

$$W_v = -b/2a = -400/(2 \cdot (-2)) = -400/(-4) = 100 \text{ m}$$

$$L = 400 - 2 \cdot 100 = 400 - 200 = 200 \text{ m}$$

Área máxima:

$$A = 100 \cdot 200 = 20.000 \text{ m}^2$$

Conferindo pelo y_v :

$$\Delta = 400^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 0 = 160.000$$

$$y_v = -\Delta/4a = -160.000/(4 \cdot (-2)) = -160.000/(-8) = 20.000 \quad \checkmark$$

Verificação da tela: $2 \cdot 100 + 200 = 400 \text{ m}$ ✓ (exatamente os 400 m). Teste de vizinhos: $W = 90 \rightarrow L = 220 \rightarrow A = 19.800$; $W = 110 \rightarrow L = 180 \rightarrow A = 19.800$; os dois são menores que 20.000 ✓

Resposta: o curral deve ter 100 m nos dois lados perpendiculares à parede e 200 m no lado paralelo à parede (100 m × 200 m), com área máxima de 20.000 m².

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Questão 01

(ENEM PPL 2015) Piso salarial de R\$ 1.800,00 com aumento percentual fixo por ano: $S(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t$. O salário de um profissional com 2 anos de serviço será, em reais: a) 7.416,00 b) 3.819,24 c) 3.709,62 d) 3.708,00 e) 1.909,62.

Resolução:

A base 1,03 significa aumento de 3 % ao ano ($100 \% + 3 \% = 103 \% = 1,03$). Substituo $t = 2$. Primeiro calculo a potência, depois multiplico.

$$\begin{aligned} S(2) &= 1.800 \cdot (1,03)^2 \\ (1,03)^2 &= 1,03 \times 1,03 = 1,0609 \\ S(2) &= 1.800 \times 1,0609 = 1.909,62 \end{aligned}$$

Conferindo ano a ano:

$$\begin{aligned} \text{ano } 0: & 1.800,00 \\ \text{ano } 1: & 1.800 + 3\% \text{ de } 1.800 = 1.800 + 54,00 = 1.854,00 \\ \text{ano } 2: & 1.854 + 3\% \text{ de } 1.854 = 1.854 + 55,62 = 1.909,62 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Resposta: alternativa e) R\$ 1.909,62.

Questão 02

Uma notícia falsa alcança N pessoas segundo $N(t) = 50 \cdot 2^t$, com t em minutos. Determine:

a) pessoas em $t = 0$; b) pessoas após 5 minutos; c) em que instante alcançará 12.800 pessoas.

Resolução:

a) Instante inicial ($t = 0$):

$$N(0) = 50 \cdot 2^0 = 50 \cdot 1 = 50$$

b) Após 5 minutos:

$$N(5) = 50 \cdot 2^5 = 50 \cdot 32 = 1.600$$

Conferindo (dobra a cada minuto): $50 \rightarrow 100 \rightarrow 200 \rightarrow 400 \rightarrow 800 \rightarrow 1.600 \checkmark$

c) Instante em que $N(t) = 12.800$:

$$\begin{aligned} 50 \cdot 2^t &= 12.800 \\ 2^t &= 12.800 / 50 = 256 \\ 2^t &= 2^8 \\ t &= 8 \end{aligned}$$

Prova real: $N(8) = 50 \cdot 256 = 12.800 \checkmark$

Resposta: a) 50 pessoas; b) 1.600 pessoas; c) aos 8 minutos.

Questão 03

Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada hora: $N(t) = 100 \cdot 2^t$. a)

Número de bactérias após 6 horas? b) Tempo para alcançar 12.800 bactérias?

Resolução:

Verificação do modelo: $N(0) = 100 \cdot 2^0 = 100$, igual à quantidade inicial $\checkmark$

a) Após 6 horas:

$$N(6) = 100 \cdot 2^6 = 100 \cdot 64 = 6.400$$

b) Tempo para 12.800 bactérias:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 2^t &= 12.800 \\ 2^t &= 12.800 / 100 = 128 \\ 2^t &= 2^7 \\ t &= 7 \end{aligned}$$

Prova real: $N(7) = 100 \cdot 128 = 12.800 \checkmark$. Também: 12.800 é o dobro de 6.400, então basta mais uma hora depois das 6 h do item a).

Resposta: a) 6.400 bactérias; b) 7 horas.

Questão 04

Considere I) $f(x) = x^5$; II) $f(x) = 5^x$; III) $f(x) = (1/2)^x$; IV) $f(x) = x^{(3\sqrt{2})}$. Assinale a alternativa correta: a) somente I não é exponencial; b) I e III não são; c) somente II é; d) I e IV não são; e) todas são exponenciais.

Resolução:

Uma função exponencial tem a forma $f(x) = b^x$, com a variável x no expoente e a base b constante, $b > 0$ e $b \neq 1$. Se o x está na base e o expoente é constante, é função potência, não exponencial.

Item	Função	Onde está o x	Classificação
I	x^5	na base (expoente 5 constante)	não é exponencial
II	5^x	no expoente (base 5)	é exponencial (crescente, $5 > 1$)
III	$(1/2)^x$	no expoente (base $1/2$)	é exponencial (decrescente, $0 < 1/2 < 1$)
IV	$x^{(3\sqrt{2})}$	na base (expoente $3\sqrt{2}$ constante)	não é exponencial

As que não são exponenciais são I e IV. A base $1/2$ é válida (positiva e diferente de 1), por isso III é exponencial.

Resposta: alternativa d) I e IV não são funções exponenciais.

Questão 05

Resolva as equações: a) $8^x = 32$ b) $4^x = 32$ c) $3^x = 1/3$ d) $4^x = 8$ e) $2^{x+1} = 2^{3x-1}$ f) $25^{x+1} = (1/5)^{3x+2}$ g) $5^{2x} = 5$ h) $2^x = 6^x$ i) $(0,1)^{x-5} = 10$.

Resolução:

Método: escrevo os dois lados na mesma base, uso $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ e $a^{-n} = 1/a^n$, igualo os expoentes e resolvo a equação do 1º grau.

a) $8^x = 32$

$$\begin{aligned} 8 &= 2^3 & \text{e} & & 32 &= 2^5 \\ (2^3)^x &= 2^5 \\ 2^{3x} &= 2^5 \\ 3x &= 5 \\ x &= 5/3 \end{aligned}$$

Prova real: $8^{(5/3)} = (2^3)^{(5/3)} = 2^5 = 32 \checkmark$

Resposta: $x = 5/3$.

b) $4^x = 32$

$$\begin{aligned} 4 &= 2^2 & \text{e} & & 32 &= 2^5 \\ (2^2)^x &= 2^5 \\ 2^2 \cdot x &= 2^5 \\ 2x &= 5 \\ x &= 5/2 \end{aligned}$$

Prova real: $4^{(5/2)} = (\sqrt{4})^5 = 2^5 = 32 \checkmark$

Resposta: $x = 5/2$.

c) $3^x = 1/3$

$$\begin{aligned} 1/3 &= 3^{-1} \\ 3^x &= 3^{-1} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Prova real: $3^{-1} = 1/3 \checkmark$

Resposta: $x = -1$.

d) $4^x = 8$

$$\begin{aligned} 4 &= 2^2 & \text{e} & & 8 &= 2^3 \\ (2^2)^x &= 2^3 \\ 2^2 \cdot x &= 2^3 \\ 2x &= 3 \\ x &= 3/2 \end{aligned}$$

Prova real: $4^{(3/2)} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8 \checkmark$ (e $3/2$ está entre 1 e 2, pois 8 está entre $4^1 = 4$ e $4^2 = 16$).

Resposta: $x = 3/2$.

e) $2^{x+1} = 2^{3x-1}$

As bases já são iguais; igualo os expoentes:

$$\begin{aligned} x + 1 &= 3x - 1 \\ 1 + 1 &= 3x - x \\ 2 &= 2x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Prova real: $2^{1+1} = 2^2 = 4$ e $2^{3 \cdot 1 - 1} = 2^2 = 4 \checkmark$

Resposta: $x = 1$.

f) $25^{x+1} = (1/5)^{3x+2}$

$$25 = 5^2 \quad \text{e} \quad 1/5 = 5^{-1}$$

$$\text{lado esquerdo: } (5^2)^{(x+1)} = 5^{(2x+2)}$$

$$\text{lado direito: } (5^{-1})^{(3x+2)} = 5^{-(3x+2)} = 5^{(-3x-2)}$$

$$5^{(2x+2)} = 5^{(-3x-2)}$$

$$2x + 2 = -3x - 2$$

$$2x + 3x = -2 - 2$$

$$5x = -4$$

$$x = -4/5$$

Prova real (os expoentes devem ficar iguais):

$$2x + 2 = 2 \cdot (-4/5) + 2 = -8/5 + 10/5 = 2/5$$

$$-3x - 2 = -3 \cdot (-4/5) - 2 = 12/5 - 10/5 = 2/5 \quad \checkmark$$

Resposta: $x = -4/5$.

g) $5^{2x} = 5$

$$5 = 5^1$$

$$5^{2x} = 5^1$$

$$2x = 1$$

$$x = 1/2$$

Prova real: $5^{(2 \cdot 1/2)} = 5^1 = 5 \quad \checkmark$

Resposta: $x = 1/2$.

h) $2^x = 6^x$

As bases são diferentes e não têm base comum. Divido os dois lados por 6^x (que é sempre positivo, nunca zero):

$$2^x / 6^x = 1$$

$$(2/6)^x = 1$$

$$(1/3)^x = 1 = (1/3)^0$$

$$x = 0$$

Prova real: $2^0 = 1$ e $6^0 = 1 \rightarrow 1 = 1 \quad \checkmark$. Para $x > 0$ teríamos $6^x > 2^x$ e para $x < 0$ teríamos $6^x < 2^x$, logo $x = 0$ é a única solução.

Resposta: $x = 0$.

i) $(0,1)^{x-5} = 10$

$$0,1 = 1/10 = 10^{-1} \quad \text{e} \quad 10 = 10^1$$

$$(10^{-1})^{(x-5)} = 10^1$$

$$10^{-(x-5)} = 10^1$$

$$10^{-x+5} = 10^1$$

$$-x + 5 = 1$$

$$-x = 1 - 5$$

$$-x = -4$$

$$x = 4$$

Prova real: $(0,1)^{4-5} = (0,1)^{-1} = 1/0,1 = 10 \checkmark$

Resposta: $x = 4$.